МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 624.04
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-257-268

Научная статья

Выпучивание прямоугольных пластин при нелинейной ползучести

С.Б. Языев, А.С. Чепурненко ✉
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ anton_chepurnenk@mail.ru

Аннотация
Введение. Задача анализа устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести актуальна для элементов конструкций из материалов, обладающих свойством старения, находящихся под действием длительных нагрузок, поскольку потеря устойчивости может происходить резко и задолго до исчерпания прочностного ресурса материала. Вопросы совместного учета геометрической нелинейности и ползучести в задачах выпучивания пластин в настоящее время остаются слабо изученными, существующие программные комплексы не позволяют выполнить такой расчёт. Целью настоящей работы выступает разработка алгоритма расчета на устойчивость прямоугольных пластинок с начальной погибью, испытывающих действие нагрузок в срединной плоскости с учетом геометрической нелинейности и ползучести.
Материалы и методы. При получении разрешающих уравнений в основу положены геометрические и статические уравнения теории гибких упругих пластин. Физические уравнения выводятся из предположения, что полные деформации равны сумме упругих деформаций и деформаций ползучести. Окончательно задача была сведена к системе из двух дифференциальных уравнений, в которых в качестве искомых функций выступают функция напряжений и прогиба. Решение полученной системы уравнений выполнялось численно с помощью метода конечных разностей в сочетании с методом последовательных приближений и методом Эйлера. В качестве граничных условий для функции напряжений используется рамная аналогия, как в случае плоской задачи теории упругости.
Результаты исследования. В рамках поставленной цели разработан алгоритм расчета и представлено решение задачи для пластины, сжимаемой в одном направлении равномерно распределенной нагрузкой. Исследован характер роста перемещений при различной величине нагрузки и начальной погиби. Установлено, что при достижении вертикальными перемещениями величин, соизмеримых с толщиной пластинки, скорость их роста начинает затухать даже при нагрузке больше длительной критической.
Обсуждение и заключение. Результаты анализа устойчивости с использованием разработанного алгоритма показывают, что рост прогиба пластины при рассмотренных граничных условиях ограничен, потеря устойчивости не наблюдается при любых значениях нагрузки, не превосходящих мгновенную критическую. Это говорит о возможности длительной безопасной эксплуатации таких конструкций при нагрузке менее мгновенной критической.

Ключевые слова: устойчивость, ползучесть, пластина, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность, начальные несовершенства, метод конечных разностей

Благодарности: авторы выражают благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Для цитирования. Языев С.Б., Чепурненко А.С. Выпучивание прямоугольных пластин при нелинейной ползучести. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(3):257–268. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-257-268

Original article

Buckling of Rectangular Plates under Nonlinear Creep

Serdar B. Yazyev, **Anton S. Chepurnenko**✉
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ anton_chepurnenk@mail.ru

Abstract
Introduction. The task of analyzing the stability of plates and shells under creep conditions is critical for structural elements made of materials with the property of aging, which are under the action of long-term loads, since the loss of stability can occur abruptly and long before the exhaustion of the strength resource of the material. Currently, the issues of joint consideration of geometric nonlinearity and creep in the problems of buckling plates remain poorly studied, existing software systems do not provide such calculations. The objective of this work is to develop an algorithm for calculating the stability of rectangular plates with initial deflection, which are subjected to loads in the middle plane, taking into account geometric nonlinearity and creep.
Materials and Methods. When obtaining the resolving equations, the geometric and static equations of the theory of flexible elastic plates were taken as the basis. Physical equations were derived from the assumption that total strains were equal to the sum of elastic strains and creep deformations. Finally, the problem was reduced to a system of two differential equations, in which the desired functions were the stress and deflection functions. The resulting system of equations was solved numerically using the finite-difference method in combination with the method of successive approximations and the Euler method. As the boundary conditions for the stress function, the frame analogy was used, as in the case of a plane problem of elasticity theory.
Results. The solution to the problem for a plate compressed in one direction by a uniformly distributed load has been presented. The nature of the growth of displacements at different load rates and initial deflection was studied. It has been established that when the vertical displacements reach values comparable to the thickness of the plate, their growth rate begins to decay even at a load greater than the long-term critical one.
Discussion and Conclusion. The results of stability analysis using the developed algorithm show that the growth of plate deflection under the considered boundary conditions is limited, stability loss is not observed at any load values not exceeding the instantaneous critical one. This indicates the possibility of long-term safe operation of such structures with a load less than instant critical one.

Keywords: stability, creep, plate, geometric nonlinearity, physical nonlinearity, initial imperfections, finite-difference method

Acknowledgements: the authors would like to thank the editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and for the specified comments that improved the quality of the article.

For citation. Yazyev SB, Chepurnenko AS. Buckling of Rectangular Plates under Nonlinear Creep. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(3):257–268. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-257-268

Введение. Анализу устойчивости тонкостенных конструкций в виде пластин и оболочек уделяется большое внимание, поскольку такие конструкции широко используются в строительстве и других областях техники [1–3]. Одной из актуальных задач в области расчета пластин и оболочек является анализ их напряженно-деформированного состояния в условиях ползучести, что подтверждается значительным числом работ, опубликованных в последнее время по данной проблеме в отечественных и зарубежных источниках. Так, в работах [4–8] исследуются вопросы выпучивания при ползучести композитных тонкостенных конструкций. В статье [9] рассматривается задача устойчивости функционально-градиентных пластин с учетом зависимости свойств материала от температуры. В работе [10] в задаче выпучивания композитных пластин применены методы стохастического анализа. В статьях [11–17] изложены вопросы устойчивости вязкоупругих пластин и оболочек при воздействии динамической и следящей нагрузки, а в статье [18] рассматриваются пластины средней толщины с учетом зависимости свойств материала от времени. Возникающие при решении указанных задач математические трудности приводят к тому, что многие исследователи ограничиваются линейными законами вязкоупругого деформирования или рассматривают случай установившейся ползучести. Большие возможности в задачах расчета пластин и оболочек с учетом ползучести открывает метод конечных элементов. Однако в современные расчетные комплексы, такие как ANSYS, Abaqus, ЛИРА и др., заложен ограниченный набор реологических моделей, применимых для конкретных материалов в фиксированном диапазоне напряжений и температур. Существует необходимость в альтернативных методах расчета, подходящих для произвольных законов вязкоупругого деформирования, в том числе нелинейных.

Целью настоящей работы явилось построение системы разрешающих уравнений для задачи выпучивания пластин прямоугольной формы с нелинейными вязкоупругими свойствами при действии усилий в срединной плоскости, с учетом больших перемещений, а также алгоритма ее решения. Отметим, что проблема устойчивости элементов конструкций с учетом ползучести не может быть решена, как проблема чистой устойчивости. Ее решение требует наличия возмущений в виде начальных неправильностей. Обычно начальные несовершенства задаются в виде начальной погиби или эксцентриситетов приложения нагрузок.

Материалы и методы. Методику расчета рассмотрим на примере пластинки с начальной погибью $w_0(x,y)$, имеющей шарнирное опирание по контуру и сжимаемой в направлении оси x распределенной нагрузкой p [кН/м] (рис. 1).

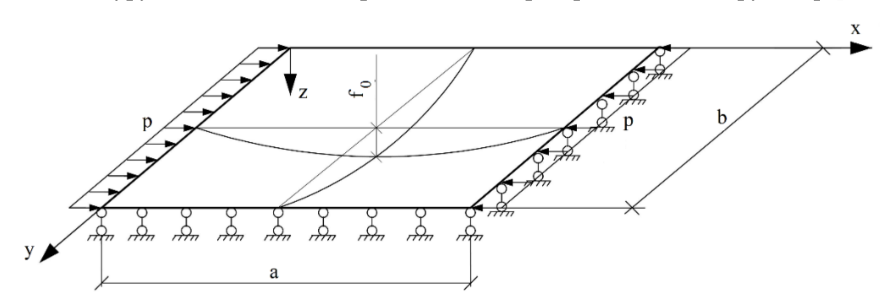


Рис. 1. Расчетная схема

В рассматриваемом случае при наличии ползучести, если сравнивать с теорией упругих гибких пластин, отличие будет проявляться только в форме физических уравнений. Полные деформации могут быть представлены в виде суммы деформаций срединной плоскости (переходящей в поверхность) и изгибных деформаций, которые вызваны изменением показателей кривизны срединной поверхности:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \gamma_{xy} = \gamma^0 - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

где ε_x и ε_y — полные линейные деформации; γ_{xy} — полные угловые деформации; ε_x^0 и ε_y^0 — линейные деформации срединной поверхности; γ^0 — угловые деформации срединной поверхности.

Для деформаций срединной поверхности может быть записано уравнение неразрывности деформаций [19]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right]. \quad (2)$$

Для материалов с вязкоупругими свойствами полные деформации можно представить в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \varepsilon_x^*; \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) + \varepsilon_y^*; \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} + \gamma_{xy}^*, \quad (3)$$

где $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \gamma_{xy}^*$ — деформации ползучести; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; σ_x, σ_y, τ_{xy} — величины компонентов напряжений по соответствующим направлениям.

Выразив в (3) компоненты напряжений через деформации, запишем физические соотношения в обратной форме:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - \left(\varepsilon_x^* + \nu\varepsilon_y^*\right)\right); \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - \left(\varepsilon_y^* + \nu\varepsilon_x^*\right)\right); \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*\right). \quad (4)$$

Связь внутренних силовых факторов с напряжениями определяется интегральными соотношениями:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x dz; N_y = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y dz; S = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy} dz; M_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z dz; M_y = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y z dz; H = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy} z dz, \quad (5)$$

где N_x и N_y — погонные продольные силы; S — погонные сдвигающие силы; M_x и M_y — погонные изгибающие моменты; H — погонные крутящие моменты; h — толщина пластинки.

Далее подставим (1) в (4), а также (4) в (5). В итоге получим:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x^0 + \nu\varepsilon_y^0\right) - N_x^*; N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y^0 + \nu\varepsilon_x^0\right) - N_y^*; S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\gamma^0 - S^*;$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - M_x^*; M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - M_y^*; H = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - H^*, \quad (6)$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки, $N_x^*=\dfrac{E}{1-\nu^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\varepsilon_x^*+\nu\varepsilon_y^*\right)dz,$

$N_y^*=\dfrac{E}{1-\nu^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\varepsilon_y^*+\nu\varepsilon_x^*\right)dz,\ S^*=\dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\gamma_{xy}^*dz,$

$M_x^*=\dfrac{E}{1-\nu^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\varepsilon_x^*+\nu\varepsilon_y^*\right)zdz,\ M_y^*=\dfrac{E}{1-\nu^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\varepsilon_y^*+\nu\varepsilon_x^*\right)zdz,\ H^*=\dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\gamma_{xy}^*zdz.$

Величины $N_x^*, N_y^*, S^*, M_x^*, M_y^*, H^*$ имеют размерность внутренних усилий и определяют вклад деформаций ползучести в перераспределение усилий.

Статические уравнения теории гибких пластин имеют вид [19]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0;\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0;$$
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial y^2}+2S\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial x\partial y}+q=0. \tag{7}$$

Здесь q — нормальная нагрузка по поверхности пластины, которая в данной задаче равна нулю.

Удовлетворить первым двум статическим уравнениям можно при помощи функции напряжений Эри, введенной по формулам:

$$N_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2};N_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2};S=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{8}$$

После подстановки последних трех равенств из (6) в последнее статическое уравнение в (7) и с учетом (8), получим первое разрешающее уравнение:

$$D\nabla^4 w=q+q^*+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial x\partial y}, \tag{9}$$

где $q^*=-\left(\dfrac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 H^*}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2}\right).$

Чтобы получить второе разрешающее уравнение, необходимо выразить из (6) деформации срединной поверхности:

$$\varepsilon_x^0=\frac{N_x-\nu N_y+N_x^*-\nu N_y^*}{Eh}=\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+N_x^*-\nu N_y^*\right);$$
$$\varepsilon_y^0=\frac{N_y-\nu N_x+N_y^*-\nu N_x^*}{Eh}=\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+N_y^*-\nu N_x^*\right); \tag{10}$$
$$\gamma^0=\frac{2\left(1+\nu\right)}{Eh}\left(S+S^*\right)=\frac{2\left(1+\nu\right)}{Eh}\left(-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+S^*\right).$$

Подставив (10) в (2), получим:

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\varPhi=\left(\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\left(w+w_0\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\frac{1}{Eh}(2\left(1+\nu\right)\frac{\partial^2 S^*}{\partial x\partial y}+$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 N_x^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N_y^*}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2 N_x^*}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 N_y^*}{\partial x^2}). \tag{11}$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи получена система разрешающих уравнений из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка (9) и (11). Уравнения (9) и (11) являются нелинейными. В полученных уравнениях величины $\varPhi$ и w представляют собой функции координат x, y, а также времени t. В явном виде в данных уравнениях время отсутствует, зависимость от времени закладывается в деформации ползучести ε_x^*, ε_y^*, γ_{xy}^*, которые учитываются введением интегральных величин $N_x^*, N_y^*, S^*, M_x^*, M_y^*, H^*$.

Для изображенной на рис. 1 расчетной схемы граничные условия записываются в виде:

$$\text{при } x=0, x=a: N_x=\frac{\partial^2\varPhi}{\partial y^2}=-p; S=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0; w=0; M_x=0;$$
$$\text{при } y=0, y=b: N_y=\frac{\partial^2\varPhi}{\partial x^2}=0; S=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0; w=0; M_y=0. \tag{12}$$

Уравнение (11) при малых перемещениях, в случае пластины из упругого материала, представляет бигармоническое уравнение, которое используется для решения плоской задачи теории упругости в напряжениях. Граничными условиями по функции напряжений для бигармонического уравнения может служить рамная аналогия. Контур пластины рассматривается как рама и функция напряжений на контуре будет равна в ней изгибающему моменту *M*, а ее производная по нормали к контуру — продольной силе *N*. Эпюры *M* и *N* в раме могут быть построены в одной из основных систем метода сил (ОСМС). Основная система, а также эпюры изгибающего момента и продольной силы в раме показаны на рис. 2.

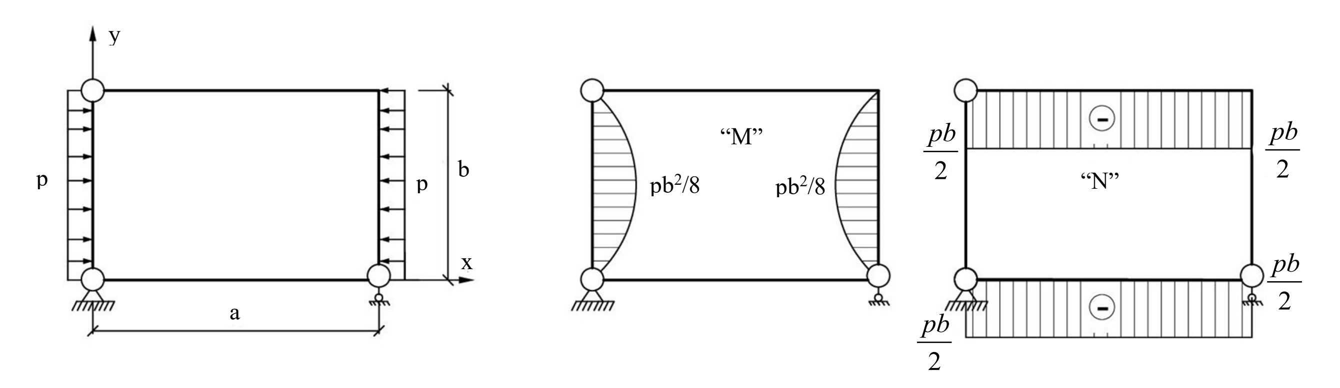


Рис. 2. ОСМС и эпюры изгибающих моментов и продольных сил

Если вертикальные перемещения не превышают четверть толщины пластинки, то можно принять усилия в срединной поверхности не зависящими от координат *x* и *y* ($N_x = -p, N_y = S = 0$) и использовать для расчетов линеаризованное уравнение:

$$D\nabla^4 w + p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q^* - p\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}. \qquad (13)$$

Аналитическое решение системы уравнений (9) и (11) связано с большими трудностями. Авторы предлагают решать данную систему численно. Используется метод конечных разностей (МКР) в комбинации с методом последовательных приближений. Для определения деформации ползучести во временной области применяется метод Эйлера. В качестве первого этапа выполняется решение для упругой пластинки. Нагрузка *p* прикладывается ступенчато с небольшим шагом. При начальных значениях нагрузки прогибы w_1 вычисляются путем решения упрощенного уравнения (13). Затем выполняется подстановка вычисленных значений w_1 в дифференциальное уравнение (11). Это позволяет определить функцию напряжений. Следующим шагом является решение дифференциального уравнения (9) с использованием известных величин функции Ф, что позволяет определить узловые величины прогибов w_1'. После этого выполняется подстановка значений $w_2 = \left(w_1 + w_1'\right)/2$ в уравнение (11). Повторение итерационного процесса на каждом шаге происходит до тех пор, пока относительное расхождение с нормами векторов узловых значений прогибов w_i и w_i' больше заданного значения (авторами оно принималось равным 0,1 %). Для второго шага по нагрузке начальным значением w_1 в каждом узле выступает конечный результат, полученный на первом шаге. Методика расчета во временной области с учетом ползучести аналогична. Интервал времени, на котором исследуется процесс, делится на шаги Δt. В случае задания закона вязкоупругого деформирования в дифференциальной форме величины деформаций ползучести на шаге $t + \Delta t$ вычисляются на основе известной скорости их роста в момент времени *t* с использованием аппроксимации по Эйлеру:

$$\varepsilon^*_{t+\Delta t} = \varepsilon^*_t + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t}\Delta t. \qquad (14)$$

Блок-схема алгоритма расчета на ползучесть приведена на рис. 3.

Отметим, что система уравнений (9) и (11) позволяет использовать схемы более высокого порядка точности, например, метод Рунге-Кутта четвертого порядка. При этом для достижения той же точности результатов можно задавать заметно большие шаги по времени. Однако при увеличении шага есть вероятность не уловить эффекты неустановившейся ползучести в начальные моменты времени. А при одинаковом шаге по времени метод Рунге-Кутта, по сравнению с методом Эйлера, требует выполнить в четыре раза больше операций.

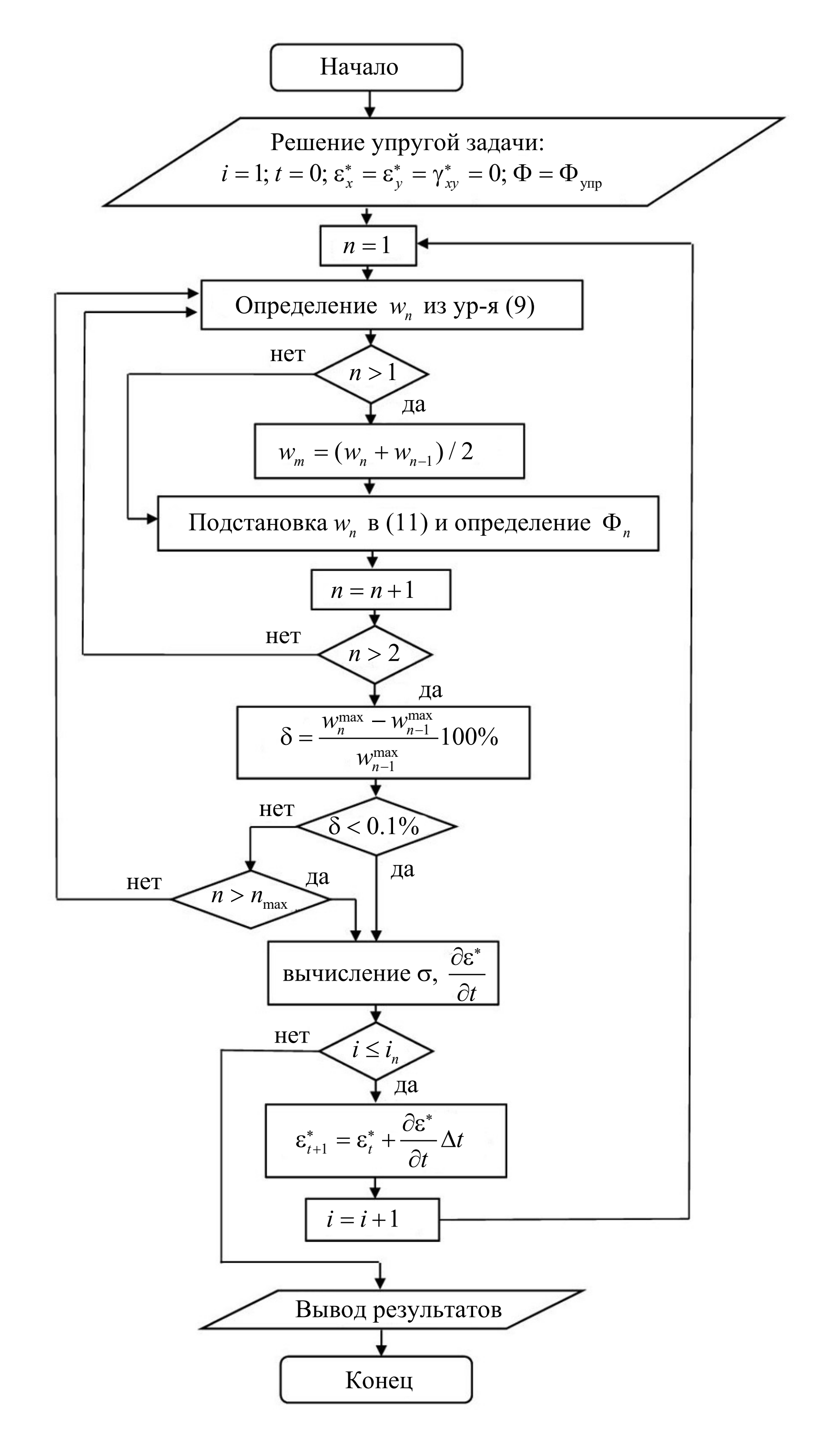


Рис. 3. Блок-схема алгоритма расчета на ползучесть

Результаты исследования. Рассмотрена полимерная пластинка из поливинилхлорида размерами $a = 2$ м, $b = 2$ м, $h = 1$ см при $E = 1480$ МПа, $\nu = 0{,}3$. В качестве закона, определяющего скорость роста деформаций ползучести, было принято нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*},\ i = x, y,\ j = x, y;$$

$$f_{ij}^* = \frac{3}{2}\left(\sigma_{ij} - \sigma_0\,\delta_{ij}\right) - E_\infty \varepsilon_{ij}^*; \tag{15}$$

$$\eta^* = \eta_0^*\ \exp\left(-\frac{\left|f_{max}^*\right|}{m^*}\right); f_{max}^* = \left|\frac{3}{2}\left(\sigma_{rr} - \sigma_0\right) - E_\infty \varepsilon_{rr}^*\right|_{max},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $\sigma_0 = J_1/3$, $J_1 = \sigma_x + \sigma_y$ — первый инвариант тензора напряжений; η_0^*, E_∞ и m — реологические параметры материала, называемые начальной релаксационной вязкостью, модулем высокоэластичности и модулем скорости.

Индексами rr в формуле (15) обозначено направление главных напряжений.

Для ПВХ значения реологических параметров авторами были взяты из работы [20]: $E_\infty = 5{,}99\cdot10^3$ МПа, m^*=12,6 МПа, η_0^* = $5{,}44\cdot10^7$ МПа·с. Форма начальной погиби $w_0(x,y)$ принималась в соответствии с первой формой потери устойчивости пластинки из упругого материала:

$$w_0\left(x,y\right) = f_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \qquad (16)$$

Для пластины из упругого материала без начальных несовершенств критическая нагрузка, в случае целого отношения сторон a/b, определяется по формуле [19]:

$$p_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \qquad (17)$$

Для верификации разработанного алгоритма расчета первым этапом было выполнено решение тестовой упругой задачи и сравнение результатов с расчетом в конечно-элементном пакете ЛИРА-САПР (рис. 4). Величина стрелы начальной погиби f_0 задавалась равной 0,15 мм. Размер сетки при использовании МКР составлял 20×20, количество шагов по нагрузке — 200. При расчете в ПК ЛИРА-САПР выполнялось разбиение пластинки треугольными конечными элементами с шагом триангуляции 0,1 м. Величина шага по нагрузке принималась такая же, как и при использовании МКР. Значение критической нагрузки для упругой пластинки, вычисленное по формуле (17), составило 1340 Н/м. В таблице 1 показано сравнение вертикальных перемещений в центре пластинки для различных значений нагрузки, полученных по авторской методике и при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Прогибы, вычисленные с использованием двух альтернативных методов, достаточно близки, за исключением нагрузки 1330 Н/м. Отклонение при этой величине нагрузки можно объяснить тем, что при приближении к критической нагрузке перемещения устремляются в бесконечность.

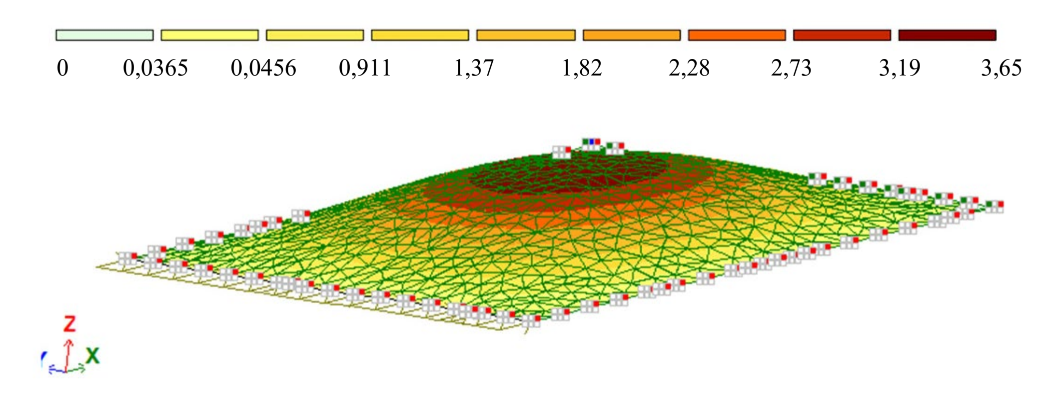


Рис. 4. Изополя вертикальных перемещений в ПК ЛИРА-САПР (p = 1330 Н/м): нелинейное загружение 1, изополя перемещений по Z(G), еденицы измерения — мм

Таблица 1

Сравнение результатов расчета по авторской методике и при помощи МКЭ

p, Н/м	$w\cdot10^3$, мм	
	ЛИРА-САПР	Авторская методика
133	16	16
266	37	37
399	63	63
532	98	99
665	146	148
798	218	221
931	336	342
1064	562	578
1197	1163	1229
1330	3646	4229

В статье [21] показана возможность перехода от решения упругой задачи расчета пластин к решению в конце процесса ползучести. Величину длительной критической нагрузки p_∞ можно получить, заменив цилиндрическую жесткость D упругой пластинки на длительную цилиндрическую жесткость D_∞, которая определяется по формуле:

$$D_\infty = \frac{\alpha h^3}{12\left(\alpha^2 - \beta^2\right)}, \tag{18}$$

где $\alpha = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}; \beta = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}.$

Для вязкоупругих стержней и круглых пластин было ранее установлено, что в случае $p < p_\infty$, рост перемещений во времени замедляется, и стрела прогиба приходит к конечному значению. Если $p = p_\infty$, прогибы растут с постоянной скоростью. При $p > p_\infty$ скорость роста прогибов возрастает.

Авторами также проведен анализ характера роста прогибов во времени для $p < p_\infty$, $p = p_\infty$ и $p > p_\infty$ для различных значений максимальной начальной погиби f_0. Кривые изменения прогиба с течением времени в центре пластины при $p = 0{,}9\ p_\infty$, $p = p_\infty$ и $p = 1{,}1\ p_\infty$ приведены соответственно на рис. 5–7.

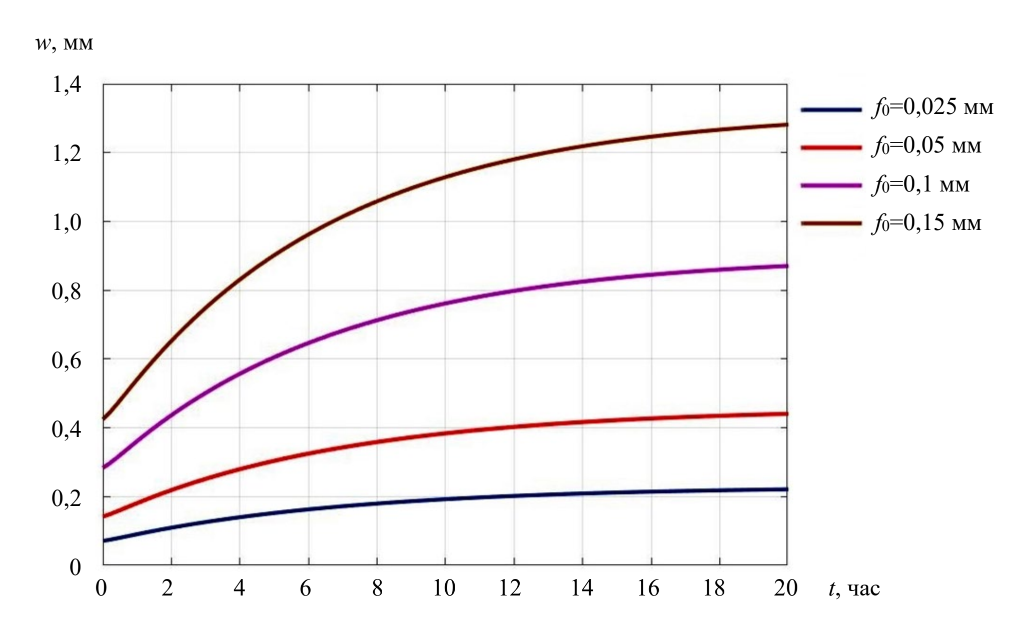


Рис. 5. Кривые изменения прогиба в центре пластины во времени при $p = 0{,}9p_\infty$

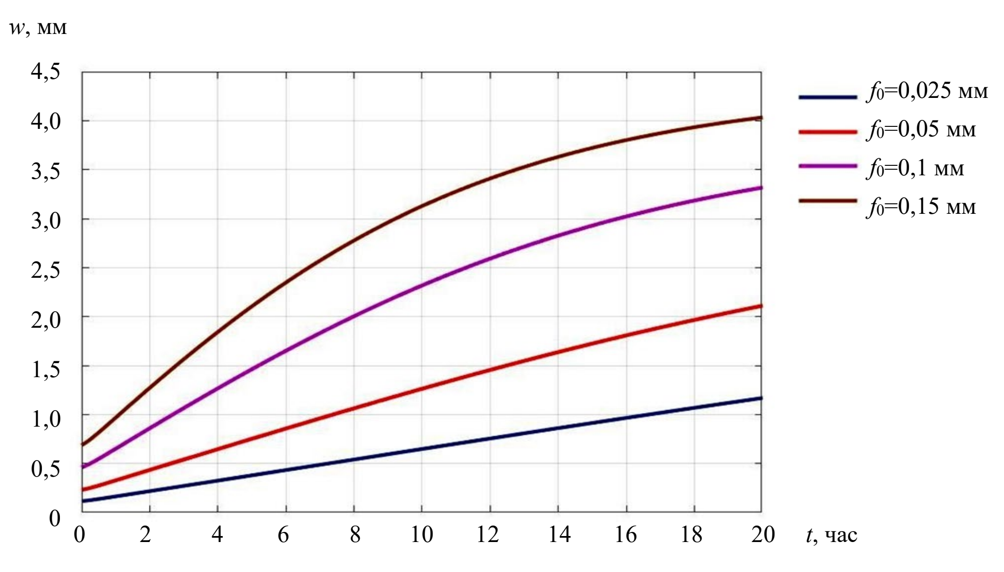


Рис. 6. Кривые изменения прогиба в центре пластины во времени при $p = p_\infty$

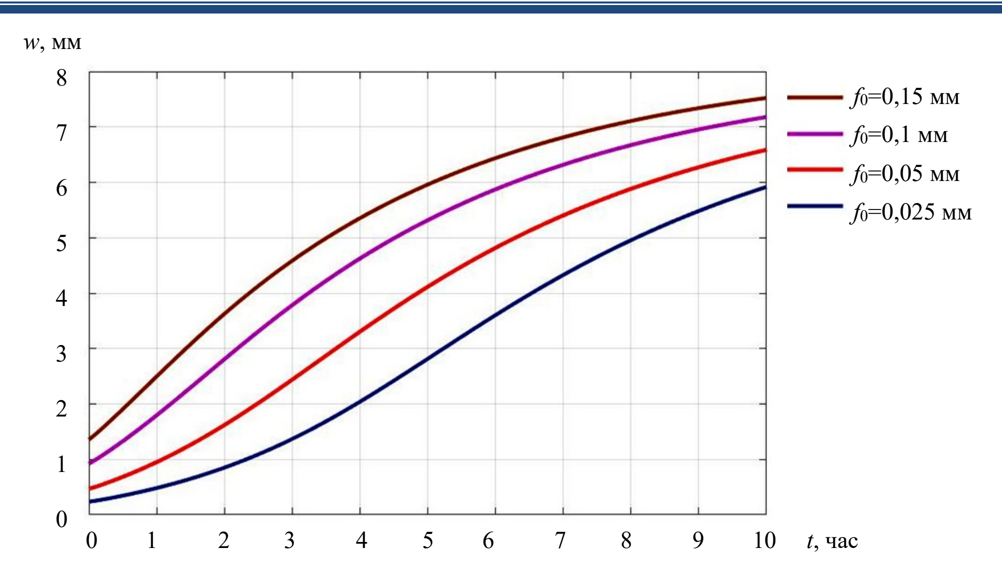


Рис. 7. Кривые изменения прогиба в центре пластины во времени при $p = 1{,}1\, p_\infty$

Обсуждение и заключение. Из рис. 5 видно, что при $p < p_\infty$ стрела прогиба всегда приходит к конечному значению, независимо от значений начальных несовершенств. В то же время при $p \geq p_\infty$ полученный в [21] характер роста прогибов имеет место только при малых перемещениях. При достижении прогибами значений, превышающих примерно четверть толщины пластины, скорость роста деформаций начинает убывать даже в случае нагрузок, превышающих длительную критическую. Следует также отметить полное отсутствие участка с возрастающей скоростью роста перемещений для пластин с большими начальными искривлениями. Объяснить выявленные эффекты можно перераспределением усилий N_x, N_y, S в срединной поверхности.

Резюмируя вышесказанное, можно сделать вывод, что вертикальные перемещения пластины, шарнирно опертой по контуру, при действии сжимающей нагрузки по одной оси, всегда приходят к конечному значению, если нагрузка не превышает мгновенную критическую. Иначе говоря, при рассмотренном закреплении и нагружении пластина в условиях ползучести находится в устойчивом равновесии.

Полученные уравнения и алгоритм вычислений позволяют рассчитывать пластинки из произвольных вязкоупругих материалов при любых вариантах закрепления. Закон связи между напряжениями и деформациями ползучести также может быть задан произвольно.

Список литературы

1. Yankovskii A.P. Refined Deformation Model for Metal-Composite Plates of Regular Layered Structure in Bending under Conditions of Steady-State Creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;52(6):715–732. https://doi.org/10.1007/s11029-017-9622-7

2. Янковский А.П. Установившаяся ползучесть сложно армированных металлокомпозитных пластин, нагруженных в своей плоскости. *Математическое моделирование.* 2010;22(8):55–66. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3007&option_lang=rus (дата обращения: 18.05.2023).

3. Хорошун Л.П., Бабич Д.В. Устойчивость прямоугольных пластин из слоистого композитного материала при длительной повреждаемости компонентов. *Прикладная механика.* 2010;46(12):67–75.

4. Zhongyu Lu, Guijun Xian, Khuram Rashid. Creep Behavior of Resin Matrix and Basalt Fiber Reinforced Polymer (BFRP) Plate at Elevated Temperatures. *Journal of Composites Science*. 2017;1(1):3. https://doi.org/10.3390/jcs1010003

5. Pawlus D. Stability of Three-Layered Annular Plate with Composite Facings. *Applied Composite Materials*. 2017;24(1):141–158. https://doi.org/10.1007/s10443-016-9518-z

6. Rouzegar J., Gholami M. Creep and Recovery of Viscoelastic Laminated Composite Plates. *Composite Structures*. 2017;181:256–272. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.094

7. Gräfe M., Dietsch P., Winter S. CLT under In-Plane Loads: Investigation on Stress Distribution and Creep. In: *Proc. INTER International Network on Timber Engineering Research*. Karlsruhe: Timber Scientific Publishing; 2018. P. 289–306. URL: https://mediatum.ub.tum.de/doc/1533836/document.pdf

8. Pawlus D. Dynamic Behaviour of Three-Layered Annular Plates with Viscoelastic Core under Lateral Loads. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015;53(4):775–788. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.4.775

9. Sharma K., Kumar D. Elastoplastic Stability and Failure Analysis of FGM Plate with Temperature Dependent Material Properties under Thermomechanical Loading. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017;14(7):1361–1386. https://doi.org/10.1590/1679-78253747

10. Kumar R.R., Mukhopadhyay T., Pandey K.M., Dey S. Stochastic Buckling Analysis of Sandwich Plates: The Importance of Higher Order Modes. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2019;152:630–643. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.016

11. Kosheleva E. Dynamic Stability of a Viscoelastic Plate. *MATEC Web of Conferences*. 2017;117:00086. https://doi.org/10.1051/matecconf/201711700086

12. Abramovich H. *Stability and Vibrations of Thin-Walled Composite Structures*. Cambridge: Woodhead Publishing; 2017. 770 p.

13. Кирсанов М.Н. Выпучивание пластины из нелинейного реологического материала при переменном нагружении. *Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.* 2011;24:19–22. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vypuchivanie-plastiny-iz-nelineynogo-reologicheskogo-materiala-pri-peremennom-nagruzhenii (дата обращения: 18.05.2023).

14. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины. *Инженерно-строительный журнал.* 2011;(6):12–22. https://cyberleninka.ru/article/n/geometricheski-nelineynoe-matematicheskoe-modelirovanie-dinamicheskoy-ustoychivosti-vyazkouprugih-pologih-obolochek-peremennoy/viewer (дата обращения: 18.05.2023).

15. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Динамическая устойчивость вязкоупругих гибких пластин переменной жесткости при осевом сжатии. *Прикладная механика.* 2014;50(4): 41–51.

16. Абдикаримов Р.А., Верлань А.Ф., Горошко И.О. Численное исследование динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин с переменной жесткостью. *Моделювання та інформаційні технології.* 2011;60:10–17.

17. Robinson M.T.A., Adali S. Nonconservative Stability of Viscoelastic Plates Subject to Triangularly Distributed Follower Loads. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 2017;55(3):1015–1027. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.55.3.1015

18. Jafari N., Azhari M. Stability Analysis of Arbitrarily Shaped Moderately Thick Viscoelastic Plates Using Laplace–Carson Transformation and a Simple HP Cloud Method. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2017;21(3):365–381. https://doi.org/10.1007/s11043-016-9334-8

19. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M., Savchenko A.A. Calculation for the Circular Plate on Creep Considering Geometric Nnonlinearity. *Procedia Engineering*. 2016;150:1680–1685. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.150

20. Chepurnenko A.S., Andreev V.I., Beskopylny A.N., Jazyev B.M. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures. *MATEC Web of Conferences*. 2016;67:06059. https://doi.org/10.1051/matecconf/20166706059

21. Андреев В.И., Языев Б.М., Чепурненко А.С. Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести. *Вестник Московского государственного строительного университета*. 2014;(5):16–24. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osesimmetrichnyy-izgib-krugloy-gibkoy-plastinki-pri-polzuchesti (дата обращения: 18.05.2023).

References

1. Yankovskii AP. Refined Deformation Model for Metal-Composite Plates of Regular Layered Structure in Bending under Conditions of Steady-State Creep. *Mechanics of Composite Materials*. 2017;52(6):715–732. https://doi.org/10.1007/s11029-017-9622-7

2. Yankovskii AP. The Steady Creeping Difficulty Reinforced the Metal-Composite Plates Loaded in the Plane. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2010;22(8);55–66. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3007&option_lang=rus (accessed: 18.05.2023).

3. Khoroshun LP, Babich DV. Ustoichivost' pryamougol'nykh plastin iz sloistogo kompozitnogo materiala pri dlitel'noi povrezhdaemosti komponentov. *Prikladnaya mekhanika.* 2010;46(12):67–75. (In Russ.)

4. Zhongyu Lu, Guijun Xian, Khuram Rashid. Creep Behavior of Resin Matrix and Basalt Fiber Reinforced Polymer (BFRP) Plate at Elevated Temperatures. *Journal of Composites Science*. 2017;1(1):3. https://doi.org/10.3390/jcs1010003

5. Pawlus D. Stability of Three-Layered Annular Plate with Composite Facings. *Applied Composite Materials*. 2017;24(1):141–158. https://doi.org/10.1007/s10443-016-9518-z

6. Rouzegar J, Gholami M. Creep and Recovery of Viscoelastic Laminated Composite Plates. *Composite Structures*. 2017;181:256–272. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.094

7. Gräfe M, Dietsch P, Winter S. CLT under In-Plane Loads: Investigation on Stress Distribution and Creep. In: *Proc. INTER International Network on Timber Engineering Research*. Karlsruhe: Timber Scientific Publishing; 2018. P. 289–306. URL: https://mediatum.ub.tum.de/doc/1533836/document.pdf (accessed: 18.05.2023).

8. Pawlus D. Dynamic Behaviour of Three-Layered Annular Plates with Viscoelastic Core under Lateral Loads. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015;53(4):775–788. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.53.4.775

9. Sharma K. Kumar D., Elastoplastic Stability and Failure Analysis of FGM Plate with Temperature Dependent Material Properties under Thermomechanical Loading. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2017;14(7):1361–1386. https://doi.org/10.1590/1679-78253747

10. Kumar RR, Mukhopadhyay T, Pandey KM, Dey S. Stochastic Buckling Analysis of Sandwich Plates: The Importance of Higher Order Modes. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2019;152:630–643. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.016

11. Kosheleva E. Dynamic Stability of a Viscoelastic Plate. *MATEC Web of Conferences*. 2017;117:00086. https://doi.org/10.1051/matecconf/201711700086

12. Abramovich H. *Stability and Vibrations of Thin-Walled Composite Structures*. Cambridge: Woodhead Publishing; 2017. 770 p.

13. Kirsanov MN. Buckling of a Plate of Nonlinear Rheological Mwith Variable Loading. *Bulletin of the Tatar State Humanitarian and Pedagogical University.* 2011;24:19–22. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vypuchivanie-plastiny-iz-nelineynogo-reologicheskogo-materiala-pri-peremennom-nagruzhenii (accessed: 18.05.2023).

14. Abdikarimov RA, Zhgutov VM. Geometrically Nonlinear Mathematical Simulation the Viscoelastic Gently Sloping Variable-Thickness Shells' Dynamic Steadiness. *Magazine of Civil Engineering.* 2011;(6):12–22. https://cyberleninka.ru/article/n/geometricheski-nelineynoe-matematicheskoe-modelirovanie-dinamicheskoy-ustoychivosti-vyazkouprugih-pologih-obolochek-peremennoy/viewer (accessed: 18.05.2023).

15. Abdikarimov RA, Khudayarov BA. Dinamicheskaya ustoichivost' vyazkouprugikh gibkikh plastin peremennoi zhestkosti pri osevom szhatii. *Prikladnaya mekhanika.* 2014;50(4): 41–51. (In Russ.)

16. Abdikarimov RA, Verlan AF, Goroshko IO. Chislennoe issledovanie dinamicheskoi ustoichivosti vyazkouprugikh ortotropnykh pryamougol'nykh plastin s peremennoi zhestkost'yu. *Моделювання та інформаційні технології.* 2011;60:10–17. (In Russ.)

17. Robinson MTA, Adali S. Nonconservative Stability of Viscoelastic Plates Subject to Triangularly Distributed Follower Loads. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 2017;55(3):1015–1027. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.55.3.1015

18. Jafari N, Azhari M. Stability Analysis of Arbitrarily Shaped Moderately Thick Viscoelastic Plates Using Laplace–Carson Transformation and a Simple HP Cloud Method. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2017;21(3):365–381. https://doi.org/10.1007/s11043-016-9334-8

19. Chepurnenko AS, Yazyev BM, Savchenko AA. Calculation for the Circular Plate on Creep Considering Geometric Nnonlinearity. *Procedia Engineering*. 2016;150:1680–1685. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.150

20. Chepurnenko AS, Andreev VI, Beskopylny AN, Jazyev BM. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures. *MATEC Web of Conferences*. 2016;67:06059. https://doi.org/10.1051/matecconf/20166706059

21. Andreev VI, Yazyev BM, Chepurnenko AS. Axisymmetric Bending of a Round Elastic Plate in Case of Creep. *Vestnik MGSU.* 2014;(5):16–24. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osesimmetrichnyy-izgib-krugloy-gibkoy-plastinki-pri-polzuchesti (accessed: 18.05.2023).

Поступила в редакцию 29.06.2023
Поступила после рецензирования 27.07.2023
Принята к публикации 01.08.2023

Об авторах:

Сердар Батырович Языев, доктор технических наук, доцент, доцент кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ScopusID, AuthorID, ORCID, russiangel@mail.ru

Антон Сергеевич Чепурненко, доктор технических наук, доцент**,** профессор кафедры строительной механики и теории сооружений Донского государственного технического университета (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ResearcherID, ScopusID, AuthorID, ORCID, anton_chepurnenk@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

С.Б. Языев — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, проведение расчетов, подготовка текста, формирование выводов.

А.С. Чепурненко — анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи

Received 29.06.2023
Revised 27.07.2023
Accepted 01.08.2023

About the Authors:

Serdar B. Yazyev, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Structural Mechanics and Theory of Structures Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ScopusID, AuthorID, ORCID, russiangel@mail.ru

Anton S. Chepurnenko, Dr.Sci. (Eng.), Associate Professor, Professor of the Structural Mechanics and Theory of Structures Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ResearcherID, ScopusID, AuthorID, ORCID, anton_chepurnenk@mail.ru

Claimed contributorship:

SB Yazyev: basic concept formulation, research objective and tasks, calculation analysis, text preparation, formulation of conclusions.

AS Chepurnenko: analysis of the research results, revision of the text, correction of conclusions.

Conflict of interest statement: the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.